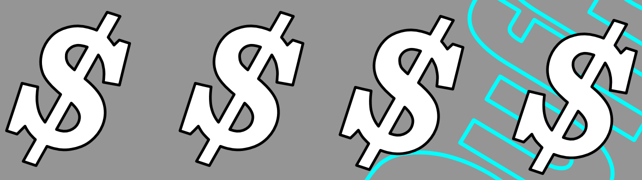
La matemática financiera incluye, al nivel de secundaria, algunos temas de valor práctico en asuntos de finanzas, que son cada vez más aplicables al uso del dinero por el ciudadano corriente.



Entre los temas más importantes figuran interés simple e interés compuesto.

En un mundo que cada vez mueve menos dinero en efectivo, es de suma importancia que el estudiante adquiera las nociones básicas sobre: la moneda de su país, el uso de tarjetas de crédito, los diferentes intereses que debe pagar al trabajar a crédito,... los cuales se convierten en temas esenciales para la vida cotidiana

Para el estudio de dichos temas es útil, y a veces indispensable, el conocimiento de los principios generales del álgebra, así como el de algunos capítulos especiales tales como el de sucesiones y el de logaritmos.

14

NOCIONES DE MATEMÁTICA FINANCIERA

1 – INTERÉS SIMPLE

Se llama interés simple **i**, al dinero que produce un determinado capital durante un período de tiempo.

El interés se llama simple, porque solamente el capital original produce intereses durante el tiempo completo de la transacción.

Si **C** es el capital, **R** el tanto por ciento en determinado período de tiempo, se tendrá que para ese período de tiempo:

si \$ 100 producen \$ R

C producen i $\longrightarrow$ $i = \dfrac{C \times R}{100}$

Tomando en cuenta el tiempo durante el cual está depositado el capital, la fórmula para el cálculo del interés simple es:

$$\boxed{i = \frac{C \times R \times t}{100}}$$

Siendo **i**, los intereses simples producidos por el capital **C** a una tasa de **R** por ciento, durante el tiempo **t**, que estuvo depositado.

Para aplicar la fórmula de interés simple con éxito, se debe tener en cuenta que:

R% (tanto por ciento) y **t** (tiempo) deben estar expresados en la misma unidad de tiempo, (mes, año, semestre,...)

Si la letra del problema NO indica si el tanto por ciento es mensual, semestral,... se debe considerar que es ANUAL.

2 – NOTACIÓN

C = { Es el capital inicial; Lo que se deposita inicialmente }

R = { Tasa; Renta; El tanto por ciento (interés por $100) }

t = Tiempo durante el cual se efectúa la transacción

i = { Interés simple producido por el capital; Ganancia; Beneficio }

NOTA

A los efectos del cálculo de intereses, un año tiene 12 meses de 30 días. Este lapso de 360 días, recibe el nombre de año comercial.

EJEMPLO: ¿Qué interés simple produce un capital de $100.000 colocado al 10% semestral, durante un año y medio?

Es necesario utilizar la misma unidad de tiempo para **R** y **t**.

Un año y medio es igual a 3 semestres.

C = $100.000

R = 10% semestral

t = 1 año y medio = 3 semestres

i = ?

$$i = \frac{100000 \times 10 \times 3}{100} = \$\ 30000$$

$$\boxed{i = \$\ 30000}$$

EJEMPLO: La mitad de un capital de $ 43000 está colocado al 52%, y la otra mitad al 60%. ¿Qué interés trimestral produce dicho capital?

Se habla de interés simple y, como se pide trimestral (tres meses), se toma como unidad de tiempo el trimestre.

Como no se dice la unidad de tiempo para el tanto por ciento, ésta debe ser anual.

60% anual es igual a: $\frac{60}{4}$ = 15% trimestral

52% anual es igual a: $\frac{52}{4}$ = 13% trimestral

El tiempo en ambos casos =1 (un trimestre)

El interés i_1 de la mitad del capital, colocado al 15% trimestral es:

$$i_1 = \frac{21500 \times 15 \times 1}{100} = \$\ 3225$$

El interés i_2 de la mitad del capital, colocado al 13% trimestral es:

$$i_2 = \frac{21500 \times 13 \times 1}{100} = \$\ 2795$$

El interés total es: $i = i_1 + i_2$ = 3225 + 2795 = $\boxed{\$\ 6020}$

3 – MONTO

Se llama MONTO a la suma del capital **C**, más los intereses simples producidos durante el período de tiempo considerado.

$$\boxed{M = C + i}$$

$$\text{Monto} = \begin{cases} \text{capital + interés} \\ \text{lo que se retira} \end{cases}$$

Antes de continuar, conviene resolver los problemas 327 al 342 de la página 321

4 – INTERÉS COMPUESTO

4.1. DEFINICIÓN

Difícilmente en el mundo comercial se aplique el interés simple, dado que comúnmente se reinvierten las ganancias para producir más ganancias.

Se dice que un capital **C** está colocado a interés compuesto, cuando los intereses simples producidos durante un período de tiempo son añadidos al capital, de modo que el nuevo capital formado produzca intereses durante un nuevo período.

A estos períodos se los llama PERÍODOS DE CAPITALIZACIÓN. Los períodos de capitalización más corrientes son el año, el semestre, o el trimestre.

En el régimen de interés compuesto, éste es una cantidad variable en forma creciente, que aumenta en sucesión geométrica.

4.2. FÓRMULA FUNDAMENTAL DEL INTERÉS COMPUESTO

Para conocer el valor del interés compuesto generado por un capital, se calcula primeramente el MONTO producido por dicho capital. Es decir, la suma del capital inicial más los intereses compuestos.

Es evidente que, restándole el capital inicial, la diferencia será el valor de los intereses compuestos.

Para este cálculo se usará como tasa **r**, el tanto por uno. Suponiendo un período de capitalización de un año, los intereses simples serán:

$i = r \times C \times t$ pero como t, es un año, t=1 $i = r \times C$

$$r = \frac{R}{100}$$

El monto al final del primer período de capitalización es de:

$M_1 = C + i \qquad M_1 = C + r \times C \qquad M_1 = C(1+r)$

Al final del segundo período de capitalización, y puesto que ahora el capital es de: **C(1+r)**, los intereses producidos serán, repitiendo el mismo razonamiento, de: $\mathbf{i=C(1+r).r}$ y el monto al final del segundo período será:

$M_2 = C(1+r) + C(1+r)r \qquad M_2 = C(1+r)(1+r) \qquad M_2 = C(1+r)^2$

Repitiendo el mismo razonamiento para un tercer período, resultará que el monto es igual a:

$$M_3 = C(1+r)^3$$

Y generalizando esta fórmula para **n** períodos da:

$$\boxed{\mathbf{M_n = C(1+r)^n}}$$

Esta fórmula es aplicable a cualquier período de capitalización (semestral, trimestral, mensual, etc.) siempre que **C**, sea el capital inicial, **r**, la tasa por uno CORRESPONDIENTE AL PERÍODO DE CAPITALIZACIÓN, y **n**, cantidad de períodos de capitalización.

4.3. CÁLCULO DEL INTERÉS COMPUESTO

Teniendo en cuenta que la fórmula fundamental en el interés compuesto es el monto, para obtener el interés compuesto se debe aplicar la definición de monto.

Si llamamos I_c al interés compuesto, al final de los **n** períodos, resulta ser el monto menos el capital inicial.

$$I_c = M - C = C(1+r)^n - C$$

$$\boxed{I_c = C\left((1+r)^n - 1\right)}$$

EJEMPLO: Se depositan \$28000 al 48% anual. La capitalización de los intereses se efectúa semestralmente. ¿Cuánto se tendrá al cabo de 6 años?

Datos:

Capital = \$ 28000

r (tanto por uno en el período) = 0,24

en 6 años hay 12 semestres, n = 12 períodos

$$r = \frac{24}{100} = 0{,}24$$

El Monto al cabo de 6 años es: $M = 28000(1+0{,}24)^{12} = \$\ 370014{,}08$

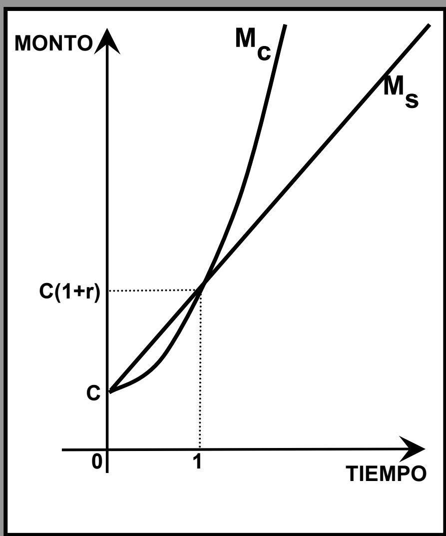
Antes de continuar, conviene resolver los problemas 343 al 352 de la página 322

COMPARACIÓN GRÁFICA DEL MONTO, EN EL INTERÉS SIMPLE Y EN EL INTERÉS COMPUESTO

Las fórmulas que ya se han deducido de ambos montos son:

Para interés simple: $M_s = C(1+rt)$

Para interés compuesto: $M_c = C(1+r)^t$



Se ve que el gráfico del monto simple es una línea recta. Esto se debe a que el interés simple crece proporcionalmente al tiempo. En cambio, el gráfico del monto compuesto es una curva de tipo exponencial. El monto compuesto crece rápidamente a medida que el tiempo pasa y su valor se aleja cada vez más del valor del monto a interés simple. Conviene observar que los montos coinciden para t=0 y t=1 y que para 0<t<1, el monto a interés compuesto es menor que el monto a interés simple.

4.4. TASA EFECTIVA ANUAL

En todos los problemas, se hace coincidir la taza de interés con los períodos de capitalización. Este tipo de capitalización se llama PERIÓDICA y la tasa empleada recibe el nombre de TASA NOMINAL. Cuando fue necesario adaptar la tasa anual a los períodos para hacer capitalización subperiódica, empleamos la llamada TASA PROPORCIONAL, que se calcula dividiendo la TASA NOMINAL entre el número de períodos.

Al aplicar este método, se obtienen montos mayores cuanto más frecuente es la capitalización.

La tasa de interés que capitalizando una sola vez en el período produce el mismo monto que al capitalizar en períodos más pequeños con tasa proporcional, se llama TASA EFECTIVA.

NOTA

Un 5% mensual de capitalización mensual no es un 5*12=60% anual. Pues hay que tomar en cuenta que la tasa también genera intereses.

Se habla entonces de TASA EFECTIVA ANUAL.

Un 5% mensual capitalizándose mensualmente representa un:

INTERÉS = $1(1+0,05)^{12}$ = 1,79586

Tasa efectiva anual = 79.586 %

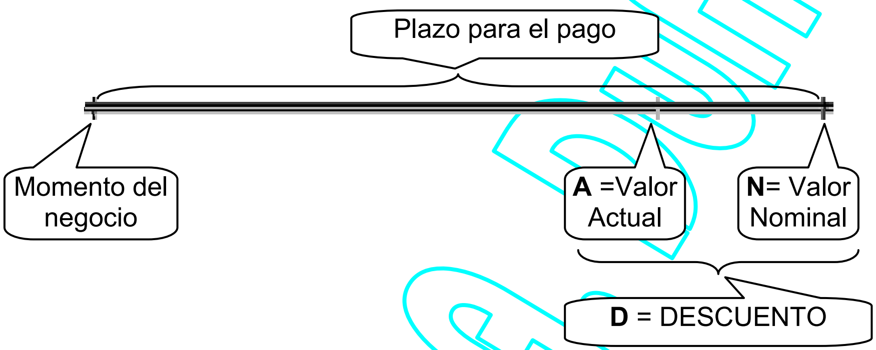
5 – DESCUENTO

5.1. INTRODUCCIÓN

Los pagos del comercio no se suelen efectuar en el acto, al contado, sino después de un cierto plazo que se conviene en cada caso.

Los documentos con los cuales se regula esta transacción, representan una cierta cantidad de dinero llamado VALOR NOMINAL, el cual resulta ser el MONTO, o sea, el dinero a pagar, más los intereses producidos durante el plazo convenido.

Si el cobro del documento se adelanta un determinado período de tiempo, no será posible pagar el valor nominal, sino que se le descontarán los intereses que estaban incluidos en el valor nominal. A esta cantidad entregada, se le llama VALOR ACTUAL.



Representando por **N**, el valor nominal, por **A**, el valor actual, y por **D**, el descuento, se tendrá que:

$$A = N - D$$

Según que los intereses descontados estén calculados sobre el valor nominal o sobre el valor actual, se llamará al descuento comercial o racional.

5.2. DESCUENTO COMERCIAL

Se llama **descuento comercial**, al **interés simple del valor nominal** durante el período de tiempo adelantado; o sea, el que va desde el momento del cobro al momento pactado en un principio.

Empleando la notación citada:

Dc = descuento comercial
t = tiempo que falta para el vencimiento
R = tanto por ciento
N = valor nominal
A = valor actual

Resulta que: $\boxed{Dc = \dfrac{N \times R \times t}{100}}$ El valor actual resulta ser: A = N – Dc

$$A = N - \frac{N \times R \times t}{100} = N\left(1 - \frac{R \times t}{100}\right) \qquad \boxed{A \; = \; N\left(1 - \frac{R \times t}{100}\right)}$$

5.3. DESCUENTO RACIONAL

Se llama **descuento racional**, al **interés simple del valor actual** durante el período de tiempo adelantado; o sea, el que va desde el momento del cobro al momento pactado en un principio.

Empleando la notación citada:

Dr = descuento racional
t = tiempo que falta para el vencimiento
R = tanto por ciento
N = valor nominal
A = valor actual

Resulta que: $Dr = \dfrac{A \times R \times t}{100}$ el valor actual es: A = N – Dr

Pero como para calcular el descuento racional es necesario conocer el valor actual que no se conoce, se deben seguir desarrollando las fórmulas.

$Dr = \dfrac{(N - Dr) \times R \times t}{100}$ al despejar Dr, resulta: $\boxed{Dr = \dfrac{N \times R \times t}{100 + R \times t}}$

El valor actual de la deuda es: $\boxed{A \; = \; N\left(1 - \dfrac{R \times t}{100 + R \times t}\right)}$

EJEMPLO: Una persona cambia un pagaré de $58000 que vence dentro de 15 meses, por otro de $40000 que vence dentro de 10 meses. Si la tasa de descuento comercial es del 60%, calcular si ha ganado o perdido en el cambio.

Para resolverlo se debe calcular el valor actual de cada pagaré.

La tasa es del 60% anual, por lo cual se debe pasar a mensual: $\frac{60}{12}$ = 5% mensual.

Primer pagaré: $$A_1 = 58000\left(1 - \frac{15 \times 5}{100}\right) = \$\,14500$$

Segundo pagaré: $$A_2 = 40000\left(1 - \frac{10 \times 5}{100}\right) = \$\,20000$$

Gana pues: A_2 es mayor que A_1

Antes de continuar, conviene resolver los problemas 353 al 357 de la página 323

6 – ANUALIDADES

6.1. DEFINICIÓN

Se llama anualidad, a las cantidades de dinero que se depositan o se pagan –generalmente cada año– y que se acumulan con sus intereses compuestos durante todo el tiempo que dura la operación, con el objeto de constituir un capital o de pagar una deuda.

Aunque generalmente la entrega es anual (anualidad), puede ser efectuada cada semestre, trimestre o cada mes.

Si la finalidad de la entrega es la de formar un capital al cabo de un número **n**, de períodos, tendremos un problema de anualidades de capitalización.

Si, por el contrario, se desea con la suma de las anualidades y sus intereses compuestos pagar una deuda y sus respectivos intereses, tendremos un problema de anualidades de amortización.

En cómodas cuotas

Uno de los ejercicios que se debería poner en todo curso de Matemática Financiera es buscar cuánto vale en realidad esa estufa o heladera, en un comercio de electrodomésticos que vende a crédito.

Así veremos que se puede estar pagando hasta 200% de interés por no saber calcular a tiempo lo que significan "unas cómodas cuotas mensuales".

6.2. ANUALIDADES DE CAPITALIZACIÓN

Si se quiere formar un capital **C** mediante depósitos **a** periódicos y constantes durante **n** períodos, se tendrá que: si **r** es el tanto por uno en cada período, el primer depósito colocado al comienzo del primer período producirá intereses compuestos durante los **n**, períodos. El segundo depósito, producirá intereses compuestos durante **(n–1)** períodos y así sucesivamente. Representando por $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$,... $\mathbf{M_n}$ los montos de cada anualidad se tendrá:

$$M_1 = a(1+r)^n$$

$$M_2 = a(1+r)^{n-1}$$

$$M_3 = a(1+r)^{n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M_n = a(1+r)$$

Sumando los montos, se tendrá el capital total formado al final de los **n**, períodos.

$$C = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \ldots + a(1+r)$$

Sacando **a**, de factor común, se logra una expresión en la que el segundo factor forma una sucesión geométrica de primer término **(1+r)**, razón**=(1+r)**, y último término**=**$\mathbf{(1+r)^n}$.

Su suma vale:

$$C = a\left((1+r)^n + (1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + \ldots + (1+r)\right)$$

$$\boxed{C = a\left(\frac{(1+r)\left((1+r)^n - 1\right)}{r}\right)}$$

Cuando el depósito de la primera anualidad se hace al comienzo del primer año, se tendrá un caso como el visto, al que se le llama anualidad anticipada.

Pero si el depósito de la primera anualidad se hace al finalizar el primer año, se tendrá un caso de anualidad vencida, cuya fórmula de capital es ligeramente distinta.

$$\boxed{C = a\left(\frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r}\right)}$$

6.3. ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN

Se llama anualidad de amortización a la cantidad de dinero que se paga anualmente para extinguir una deuda con sus intereses compuestos, al cabo de cierto número de años.

También los préstamos a varios años, como los que conceden los bancos, son pagados por cuotas periódicas que se componen de intereses y parte del capital adeudado.

Supongamos que en una fecha, a partir de la cual contamos los años, se contrae una deuda **D**, y al final de cada año se paga una anualidad.

La deuda **D**, al cabo de **n** años, ya no será la misma, sino que será **D**, más los intereses compuestos, es decir:

$$\text{Deuda} = D(1+r)^n$$

Por otra parte, como las anualidades se pagan al final de cada período, será un caso de anualidades vencidas, cuya fórmula de capital se calculará: la primera anualidad producirá intereses por **(n–1)** períodos, la segunda por **(n–2)** períodos, y así sucesivamente. Los montos producidos por cada anualidad son:

$$M_1 = a(1+r)^{n-1}$$

$$M_2 = a(1+r)^{n-2}$$

$$M_3 = a(1+r)^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$M_n = a$$

Sumando los montos, se tendrá el monto total formado al final de los **n**, períodos.

$$C = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} + \ldots + a$$

Sacando **a**, de factor común, se logra una expresión en la que el segundo factor forma una sucesión geométrica de primer término **=1**, razón**=(1+r)**, y último término**=(1+r)$^{n-1}$**

Su suma vale:

$$C = a\left((1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + (1+r)^{n-3} + \ldots + 1\right) \qquad \boxed{C = a\left(\frac{\left((1+r)^n - 1\right)}{r}\right)}$$

Igualando la deuda con sus intereses compuestos, y las anualidades con sus intereses, se concluye que la deuda queda paga cuando se cumple que:

$$\boxed{D(1+r)^n = a\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right)}$$

De esta expresión es posible despejar la anualidad **a**

Resolver los problemas 358 al 360 de la página 323

7 – ALGUNAS PREGUNTAS SOBRE EL TEÓRICO

1) a) Defina interés simple y compuesto.

b) Deducir directamente o demostrar: $M=C(1+r)^n$

c) Exprese t, en función de M, C y (1+r) del ítem anterior.

2) a) Definir interés simple - interés compuesto.
Deducir cada una de las fórmulas.

b) Dado un capital $ 100.000, indicar cuál de las dos inversiones es la más conveniente:

i) Colocar dicho capital a una tasa de 20% trimestral en 9 años a interés simple.

ii) Colocar dicho capital a una tasa de 15% bimensual en cuatro años a interés compuesto.

 Correo: gustavoduffour@adinet.com.uy GUSTAVO A. DUFFOUR

8 – PROBLEMAS PROPUESTOS

Los resultados al final del libro.

327) a) ¿Cuánto ganará el Sr. López si deposita $ 50000 y retira $57500 del banco de Montevideo 3 meses después?
b) ¿Cuál es la tasa de interés con la que trabaja el banco de Montevideo?

328) La Srta. Díaz deposita $ 80000 en el B.R.O.U. obteniendo un beneficio de $16000.
a) ¿Cuánto habrá retirado?
b) ¿Cuánto tiempo estuvo depositado, si el B.R.O.U. trabaja con una tasa del 40%?

329) El Sr. Alegre retira $ 84000 del banco Comercial, obteniendo un beneficio por ello de $ 14000.
a) ¿Cuánto fue lo depositado por el Sr. Alegre si el dinero estuvo colocado durante 5 meses?
b) ¿Cuál es la tasa mensual de la colocación?

330) a) ¿A qué tasa mensual habrá depositado el Sr. Bueno la cantidad de $15000 en el banco Malón si retira al cabo de 6 meses la cantidad de $ 16800?
b) ¿Cuál será la tasa trimestral y anual con las que trabaja el banco Malón?

331) La Srta. María desea saber: ¿durante cuánto tiempo debe estar depositada la cantidad de $ 8000, para poder obtener un beneficio de $ 4000, en un Banco que trabaja con una tasa del 5% mensual?

332) El Sr. De Feo desea saber: ¿durante cuánto tiempo debe estar depositada la cantidad de $ 2500 para poder retirar la cantidad de $ 3500 del banco del Este, que trabaja con una tasa del 60% anual?

333) El Sr. González retiró $160000 del banco del Sur que trabaja con una tasa del 12%. Si ganó $ 14720. ¿Cuánto tiempo estuvo depositado el dinero en el Banco del Sur?

334) Un capital de $50000 se coloca desde el 13 de mayo hasta el 25 de julio a una tasa de interés simple del 30% semestral. ¿Cuál es el interés que produce?

335) ¿A qué tasa de interés simple hay que colocar un capital de $15000 desde el 15 de marzo al 15 de septiembre, para que origine un beneficio de $ 3066,7 por concepto de intereses?

336) Los $\frac{3}{8}$ de un capital se colocan al 80% anual por 6 meses, el resto del capital al 90% por 4 meses, originando de esta manera $5400 de intereses totales.
¿Cuál es el capital colocado?

337) Los $\frac{2}{5}$ de un capital se colocan al 82% anual por 5 meses, el resto del capital al 20% semestral por 6 meses, resultando una diferencia de intereses entre las dos fracciones de capital de $1600. ¿A cuánto asciende el capital?

338) Un inversionista decidió colocar los $\frac{2}{3}$ de su capital al 60% anual y el resto al 4% mensual, ambas partes por 5 meses.
¿Cuál es el capital inicial del inversionista si se origina un monto total de $ 90000?

339) ¿Cuál es el capital que colocado al 60% anual durante 4 meses origina un monto de $ 53040?

340) ¿A qué tasa de interés habrá que colocar un capital durante 4 años, para que los intereses resulten $\frac{1}{2}$ del capital invertido?

341) Colocado un capital al 30% trimestral, se desea saber: ¿al cabo de cuánto tiempo va a ser triplicado?

342) Dos capitales se colocan al 60% y 40% respectivamente, originando anualmente los mismos intereses. ¿Cuáles son los capitales si difieren en $ 40000?

343) Averiguar: ¿a cuánto asciende al cabo de 6 años un capital de $22500 colocado al 50% de interés compuesto anual?

344) ¿A cuánto ascenderá dentro de 9 años un capital de $12000 colocado al 60% de interés compuesto anual?

345) Hallar el monto de $8500 al 35% de interés compuesto en 12 años.

346) Hallar el monto de $ 50000 colocado durante 4 años al 50% (anual) de interés compuesto, capitalizándose los intereses cada 6 meses.

347) Calcular a cuánto ascenderá un capital de $20000 colocado al 60% anual de interés compuesto durante 3 años, si los intereses se capitalizan trimestralmente.

348) Hallar el interés producido por un capital de $70000 invertido al 65% de interés compuesto anual durante 5 años.

349) Hallar el interés producido por un capital de $26000 invertido al 40% de interés compuesto anual durante 15 años.

350) ¿Qué interés se obtiene colocando $60000 a interés compuesto durante 4 años al 30% (anual) si los intereses se capitalizan semestralmente?

351) Se colocan $48400 al 40% de interés compuesto. Los intereses se capitalizan trimestralmente. ¿En cuánto se convertirán al cabo de 3 años?

352) Un capital de $25000 colocado al 50% de interés compuesto importó $284765,62. ¿Cuántos años duró la inversión?

353) ¿Cuál es el descuento comercial que sufre un pagaré de $96000 al 70%, 50 días antes de su vencimiento?

354) ¿Qué descuento comercial sufre un pagaré de $50000 que se descuenta al 85%, 90 días antes de su vencimiento?

355) ¿Cuál es el descuento comercial que sufre un documento de $24650 al 70%, que vence el 3 de octubre, pero fue descontado el 15 de junio anterior?

356) El día 10 de octubre se firma un pagaré de $100000 que vence a los 60 días, el 26 de octubre se levanta. ¿Cuál es el descuento comercial a razón de 50%?

357) Por dos pagarés, uno de $55200 que vence dentro de 7 meses y otro de $72000 que vence dentro de 4 meses, un banquero entrega $ 93480. Sabiendo que fueron descontados comercialmente, calcular la tasa del descuento.

358) Desde el día del nacimiento de un niño su padre deposita en un banco $5000 cada 6 meses, al 50% anual, capitalizándose los intereses semestralmente. Calcular el capital formado cuando el joven cumpla 21 años.

359) Una persona toma un préstamo de $600000 al 50%, para amortizar en 5 años. ¿A cuánto ascenderán las anualidades?

360) Hay que pagar una deuda de $1.000.000 dentro de 6 años, para lo cual se desea constituir un fondo de amortización. Si las anualidades ganan el 30% de interés compuesto. ¿A cuánto ascenderá el valor de cada anualidad?